807. Positive operation ノ固有値ニ就イテ

角谷 静夫（阪大）

(B) ヲ semi-order ノツイタ complex Banach 空間，T ヲ (B) デ定義サレタ positive linear operation デ[1] 且ツ $\|T^n\| \leqq C$, $n=1, 2, \cdots\cdots$, ナル如キ常数 C ガ存在スルモノトスル。

コノ様ナ T ハ Markoff chain ノ問題ニ表ハレテ来ルモノデ、カヽル T ノ固有値 λ ガ絶対値 1 ヲ超ヘルコトガ出来ナイコトハ明カデアル。シカシ絶対値 1 ノ固有値ノ分布状態ニツイテハ精シイコトハ直ニハワカラナイ。Markoff chain ノ場合ハ $\|T^n\|=1$, $n=1, 2, \cdots\cdots\cdots$, デ且ツ λ=1 ガ固有値ニナツテヰルコトハ明カデアルガ、ソレ以上ノ結果ヲ得ルニハ更ニ條件ガ必要デアル。実際 Markoff chain ノ議論ヲ進メルタメニハ

---

(1) positive operation ニ関シテハ 170 号 752, 171 号 760, 172 号 765 ヲ参照。

(2) 例ヘバ前号（185 号）ノ談話 804 ヲ参照。

「$|\lambda|=1$ ナル固有値ガ有限個シカナク（シカモソノ各々ガ *finite multiplicity*）、且ツソレラガスベテ $\lambda^N=1$ ナル関係ヲ（十分大キイ N ニ対シテ）満足スル」

ト云フ事実ガ *essential* デ、コノ結果ヲ得ルタメニ種々ノ條件ガ導入サレタ。[3] M. Fréchet. ハ「*transition probability* $P(t,E)$ ガ有界ナ *density* $p(t,s)$ ヲ持ツ（即チ $P(t,E)=\int_E p(t,s)\,ds$ ニテ $0\leqq p(t,s)\leqq M$ ナル如キ M ガ存在スル）」コトヲ假定シ，W. Doeblin ハ「$P^{(d)}(t,E)<1-b$ ガ $mes(E)<\eta$ ナル任意ノ *Borel* 集合 E ニ対シテ成立スル如キ *positive integer* d 及ビ *positive number* η, b ガ存在スル」コトヲ假定シタ。吉田氏ハ更ニ N. Kryloff - N. Bogoliouboff ノ條件：

$$(K)\left\{\begin{array}{l}\textit{positive integer } m \text{ ト } \textit{completely} \\ \textit{continuous} \text{ ナ } \textit{linear operator } V \\ \text{ガ存在シテ } \|T^m - V\|<1 \text{ トナル。}\end{array}\right.$$

ノ下デ同ジ結果ガ得ラレルコトヲ証明サレタ。[4]

吉田氏ノ方法ハ *uniform ergodic theorem* ヲ使フノデアルガコノ *positive operation* T ガ *Banach* 空間 (M) ニ於ケル *linear operation* デアリ且ツ *probability kernel* $P(t,E)$ ニヨッテ與ヘラレルモノデアルト云フ事実ヲ *essential* ニ使

(3) 前号ノ談話 804 参照。

(4) 177 号ノ談話 780

ッテヰル。コヽデ問題トスルノハ以上ノ結果ガ一般ノ semi-ordered complex Banach 空間ニ於テ、単ニ T ガ positive デ $\|T^n\| \leqq C$, $n=1,2,\cdots\cdots$ ヲ満足スルコトト、T ガ N. Kryloff－N. Bogoliouboff ノ條件 (K) ヲ満足スルト云フコトトカラ得ラレナイカト云フコトデアル。良ク知ラレタ如ク條件 (K) ト $\|T^n\| \leqq C$, $n=1,2,\cdots\cdots$ ナル C ガ存在スルト云フコトトカラ uniform ergodic theorem ガ成立シ、シタガッテ $|\lambda|=1$ ナル T ノ固有値 λ ガ有限個デ且ツ何レモ finite multiplicity デアルコトガワカルカラ、$\lambda^N=1$ ナル N ガ存在スルコトヲ示セバヨイ。コレハ以下ノ定理デ証明サレル如ク極メテ簡単ナコトデアリナガラ長イ間証明スルコトガ出来ナカッタモノデアル。コレニヨッテ Markoff chain ノ (一般ノ positive operation ヘノ) 抽象化ガ出来タワケデアル。

$\boxed{\text{定理}}$ (B) ヲ semi-ordered complex Banach 空間、T ヲ (B) デ定義サレタ positive linear operation デ $\|T^n\| \leqq C$, $n=1,2,\cdots\cdots$ ナル如キ常数 C ガ存在スルモノトスル。然ルトキハ若シ T ガ條件 (K) ヲ満足スレバ T ノ絶対値 1 ノ固有値 λ ハ (モシ存在スレバ) スベテ $\lambda^N=1$ ナル方程式ヲ満足スル。(5)

---

(5) $|\lambda|=1$ ナル T ノ固有値 λ ハ有限個シカ存在シナイノデアルカラコノ N ハ十分大キクトレバスベテノ λ ニ共通ニナルヤウニスルコトガ出来ル。

証明 定理ノ假定ヨリ uniform ergodic theorem ガ成立スル．ヨッテ

$$T = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T_i + S$$

ナル分解ガ得ラレル．コヽニ λ_i $(i = 1, 2, \cdots\cdots, k)$ ハ $|\lambda| = 1$ ナル T ノ固有値，T_i $(i = 1, 2, \cdots\cdots, k)$ ハ completely continuous ナ linear operation デ且ツ $T_i^2 = T_i$，$T_i T_j = 0$ $(i \neq j)$，$T_i S = S T_i = 0$ ヲ満足スル．又 S ハ $\| S^n \| \leqq \frac{M}{(1+\varepsilon)^n}$，$n = 1, 2, \cdots\cdots$ ヲ満足スル（M, ε ハ正ノ常数）ヨッテ

$$T^n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^n T_i + S^n, \quad n = 1, 2, \cdots\cdots$$

トナル．今 $|\lambda| = |\mu| = 1$ ナル二ツノ complex number λ, μ ニ對シテ $\lambda^N = \mu^N$ ナル如キ positive integer N ガ存在スルトキ $\lambda \sim \mu$ デアルト定義スレバ $\lambda \sim \lambda$；$\lambda \sim \mu \rightarrow \mu \sim \lambda$；$\lambda \sim \mu$，$\mu \sim \nu \rightarrow \lambda \sim \nu$ デアルカラ、$\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_k$ ハ互ニ $\sim$ ナル関係ヲモツモノノ class ニ分タレル．コレヲ $\{(\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2}, \cdots\cdots, \lambda_{\alpha_{k_\alpha}})\}$ $(\alpha = 1, 2, \cdots\cdots, l)$ トセヨ．各々ノ α ニ對シテ N ヲ十分大キクトレバ $\lambda_{\alpha_1}^N = \lambda_{\alpha_2}^N = \cdots\cdots = \lambda_{\alpha_{k_\alpha}}^N$ トナルカラ、更ニ N ヲ十分大キクトッテコレガ $\alpha = 1, 2, \cdots\cdots, l$ ニ對シテ成立スルヤウニスルコトガ出來ル．コノ N ニ對シテ

$$\lambda_{\alpha_1}^N = \lambda_{\alpha_2}^N = \cdots\cdots = \lambda_{\alpha_{k_\alpha}}^N \equiv \lambda_\alpha^* \quad (\alpha = 1, 2, \cdots\cdots, l)$$

トセヨ，$\alpha \neq \beta$ ナルトキハ $\lambda_\alpha^* \neq \lambda_\beta^*$ デ．シカモ明カニ $\lambda_\alpha^* \neq \lambda_\beta^*$．

ヨッテ T^N ハ

$$T^N = \sum_{\alpha=1}^{l} \lambda_\alpha^* (T_{\alpha_1} + T_{\alpha_2} + \cdots\cdots + T_{\alpha_{k_\alpha}}) + S^N ,$$

$$\lambda_\alpha^* \neq \lambda_\beta^* \quad (\alpha \neq \beta)$$

ト云フ形ニ表ハサレル．從ッテ

$$T_\alpha^* = T_{\alpha_1} + T_{\alpha_2} + \cdots\cdots + T_{\alpha_{k_\alpha}}$$

トオケバ

$$T^N = \sum_{\alpha=1}^{l} \lambda_\alpha^* T_\alpha^* + S^N$$

トナリ且ツ

$$(T_\alpha^*)^2 = T_\alpha^* , \quad T_\alpha^* T_\beta^* = 0 \quad (\alpha \neq \beta),$$

$$T_\alpha^* S = S T_\alpha^* = 0$$

デアル，

ヨッテ又

$$T^{nN} = \sum_{\alpha=1}^{l} \lambda_\alpha^{*n} T_\alpha^* + S^{Nn} , \quad n = 1, 2, \cdots\cdots$$

トナル．$\lambda_\alpha^* \neq \lambda_\beta^*$ $(\alpha \neq \beta)$ ナルコトヨリ、任意ニ $|\theta_\alpha| = 1$ ナル complex number θ_α $(\alpha = 1, 2, \cdots\cdots l)$ (但シ $\lambda_\alpha^* = 1$ ナル α ニ對シテハ $\theta_\alpha = 1$ トス) ヲ與ヘタトキ、Kronecker ノ定理ニヨリ positive integer ノ系列 $\{n_\nu\}$ $(n_\nu \to \infty)$ ヲ作ッテ $\lim_{\nu \to \infty} \lambda_\alpha^{* n_\nu} = \theta_\alpha$

($\alpha=1,2,\cdots\cdots,l$) ナラシメルコトガ出来ル. ヨッテ上式ニテ $n=n_\nu$ トオキ $\nu\to\infty$ ナラシメルトSN $S^{Nn_\nu}\to 0$ (uniformly) ナルコトヨリ

$$T^{Nn_\nu}\longrightarrow\sum_{\alpha=1}^{l}\theta_\alpha T_\alpha^* \quad (uniformly)$$

トナル。T^{Nn_ν} ガ positive operation デアルカラ $\sum_{\alpha=1}^{l}\theta_\alpha T_\alpha^*$ ハ又 positive operation デナケレバナラナイ。然ルニ若シ λ_α^* ($\alpha=1,2,\cdots\cdots,l$) ノウチニ $\lambda_\alpha^*\neq 1$ (シタガッテ又 $\lambda_\alpha^*\neq 1$) ナルモノガ少クトモ一ツ存在スレバ θ_α ヲ任意ノ $|\theta_\alpha|=1$ ナル complex number ニトリ他ノ θ_β ($\beta\neq\alpha$) ヲスベテ1ニ等シクトルコトガ出来ルカラ $\theta_\alpha T_\alpha^*+\sum_{\beta\neq\alpha}T_\beta^*$ ハ positive operation トナラネバナラヌ。コレハ θ_α ガ任意デアルカラ $T_\alpha^*\equiv 0$ デナケレバ矛盾デアル。ヨッテ $\lambda_\alpha^*\neq 1$ ナル α ニ対シテ $T_\alpha^*\equiv 0$.

然ルニ $T_\alpha^*=\sum_{i=1}^{k_\alpha}T_{\alpha_i}=0$ デアレバ各々ノ $T_{\alpha i}$ ハ

$$T_{\alpha_i}T_\alpha^*=\sum_{j=1}^{k_\alpha}T_{\alpha_i}T_{\alpha_j}=T_{\alpha_i}=0$$

トナルカラ結局 $\lambda_i\neq 1$ ナル λ_i ニ対シテ $T_i=0$ トナル. 即チ T ノ絶対値1ノ固有値 λ ハスベテ $\lambda^N=1$ ヲ満足スル。